UL245

SESSION 2002

Filière : 2ème concours – Concours F/S (Paris)

MATHEMATIQUES

(Epreuve commune aux ENS Ulm et Lyon)

Durée : 3 heures

Les calculatrices sont interdites.

Tournez la page S.V.P.

Les calculatrices sont interdites. L'épreuve est constituée de deux exercices et d'un problème indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en considération dans la notation de la copie.

Exercice 1 : Équations différentielles

Étant donnée une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

où f est une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on appelle solution maximale pour cette équation différentielle une fonction $y(t)$ définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et satisfaisant (1), et telle que l'on ne peut pas la prolonger sur un intervalle J contenant strictement I en une solution de (1).
On rappelle l'énoncé d'une version faible du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞, alors l'équation différentielle*

$$y'(t) = f(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0$$

admet une unique solution maximale sur un intervalle de temps I contenant t_0.

1. Soient a et b des nombres réels donnés. On considère l'équation différentielle non linéaire du premier ordre :
$$y'(t) = ay(t) - by^3(t),\ y(0) = y_0. \tag{2}$$
Montrer qu'il existe pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ une unique solution maximale de (2).

2. En utilisant le changement de fonction inconnue $z(t) = 1/y^2(t)$ donner la forme explicite de cette solution, ainsi que son comportement aux bornes de son intervalle maximal de définition. (Discuter soigneusement suivant les valeurs de y_0, a et b les allures des solutions ainsi que les différents comportements limites possibles.)

3. On suppose maintenant que l'on a le système de deux équations différentielles
$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) + (a - x^2(t) - y^2(t))x(t),\ x(0) = x_0 \\ y'(t) &= x(t) + (a - x^2(t) - y^2(t))y(t),\ y(0) = y_0. \end{aligned}$$
On suppose que a et b sont deux réels strictement positifs. En posant $z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ donner la forme générale de la solution de ce système. Donner l'allure des courbes paramétriques $t \mapsto (x(t), y(t))$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Polygones et polynômes

Dans cet exercice on se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$, et on note C le cercle unité,

$$C = \{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| = 1\}.$$

On se donne n points ($n \geq 2$) sur C, distincts deux-à-deux : $z_1, \ldots, z_n$, et on note

$$\begin{aligned} S &= \{z_1, \ldots, z_n\}, \\ P_S(X) &= (X - z_1)(X - z_2)\cdots(X - z_n), \\ f_S(t) &= \prod_{j=1}^{n} \|A_j M_t\|, \end{aligned}$$

où le vecteur $A_j M_t$ est le vecteur d'extrémités A_j (d'affixe z_j) et M_t (d'affixe e^{it}), la norme étant la norme euclidienne usuelle dans le plan.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$f_S(t) = |P_S(e^{it})|.$$

2. Montrer que si l'on se donne deux ensembles de n points S et S' comme ci-dessus, il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

   (i) $S = S'$,

   (ii) $f_S = f_{S'}$,

   (iii) $P_S = P_{S'}$.

3. Désormais on se fixe un ensemble S à n éléments. On notera G_S l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que f_S soit périodique de période α. Montrer que G_S est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$, et qu'il contient 2π.

4. On suppose que les points $z_1, \ldots, z_n$ sont triés ainsi :

$$z_1 = e^{i\theta_1}, \ldots, z_n = e^{i\theta_n}, \text{ avec } 0 \leq \theta_1 < \cdots < \theta_n < 2\pi.$$

   Montrer que si $\alpha \in G_S$, il existe $j \in \{2, \ldots, n\}$ tel que

$$\alpha = \theta_j - \theta_1.$$

5. En déduire que G_S admet un plus petit élément strictement positif α_S et que $G_S = \alpha_S \mathbb{Z}$.

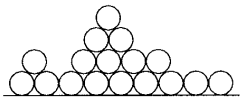
6. Montrer que $\alpha_S = 2\pi/p_S$ où p_S divise n.

7. Prouver que $\alpha_S = 2\pi/n$ si et seulement si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un polygone convexe régulier à n cotés, et déterminer le polynôme P_S associé.

Problème : Dénombrement et fonctions génératrices

On considère des empilements "stables connexes" de n cercles de même rayon sur une droite, c'est-à-dire :

- la première "couche" est posée sur la droite, les cercles sont tangents deux-à-deux,
- tout cercle d'une couche supérieure est tangent à exactement deux cercles de la couche inférieure. (Voir l'exemple ci-dessous.)



On note $g(n,k)$ le nombre de tels empilements (à translation près), avec n le nombre total de cercles, et k le nombre de cercles sur la première couche. On notera de même $f(n) = \sum_{k=0}^{n} g(n,k)$, et $c(k) = \sum_{n=k}^{+\infty} g(n,k)$.

1. Calculer $f(n)$ et $c(k)$ pour $n, k \leq 5$.

2. Pour tout $n \geq 1$ déterminer la taille minimale $k_0(n)$ de la première couche d'un empilement.

3. Déterminer la hauteur maximale $e(n,k)$ d'un empilement de n cercles dont la première couche contient k cercles, $k \geq k_0(n)$. Déterminer $\max_{k \geq k_0(n)} e(n,k)$.

4. On note $h(n,k)$ le nombre d'empilements dont la deuxième couche est pleine (elle contient donc $k-1$ cercles). Montrer que

$$h(n,k) = g(n-k, k-1).$$

5. Si l'on pose de plus $g(0,0) = 1$ et $h(0,0) = 0$, montrer que g et h satisfont la relation

$$g(n,k) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} h(m,l) g(n-m, k-l).$$

(On essaiera de décomposer les empilements en fonction de leur deuxième couche.)

6. *On pourra admettre le résultat de cette question.* On note $G(x,y)$ et $H(x,y)$ les fonctions génératrices définies par :

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} g(n,k) x^n y^k, \\ H(x,y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} h(n,k) x^n y^k. \end{aligned}$$

Montrer en utilisant la fonction $e(n,k)$ et la question 3 que ces séries convergent pour tous x et y dans $[0,1[^2$.

7. Montrer que pour tous x et y dans $[0,1[^2$ on a les relations

$$G(x,y) = 1 + G(x,y)H(x,y) \text{ et } H(x,y) = xyG(x,xy).$$

En déduire une équation fonctionnelle satisfaite par la fonction G.

8. On pose pour tout entier $N \geq 1$ et tous réels $x \geq 0$ et $y \in [0,1]$

$$G_N(x,y) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{xy}{1 - \cfrac{x^2 y}{\ddots \\ 1 - x^N y}}}, \quad F_N(x) = G_N(x,1).$$

(a) À y fixé dans $[0,1]$ que peut-on dire du domaine de définition en x de $G_N(x,y)$, et de celui de $F_N(x)$?

(b) Montrer que si l'on pose $F_0(x) = 1$, alors $\forall N \geq 0$, il existe $\epsilon_N > 0$ tel que si $x \in [0, \epsilon_N[$ on a

$$F_{N+1}(x) \leq \frac{1}{1 - xF_N(x)}.$$

(c) On se donne $x \in [0,1[$. Soit la suite récurrente :

$$u_0 = 1, \; u_{n+1} = \frac{1}{1 - xu_n}.$$

Est-elle convergente?

(d) En déduire que si $x \leq 1/4$, la suite $(F_N(x))_{N \geq 1}$ est bornée.

(e) On fixe $x \in [0, 1/4]$, montrer que l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à y associe $G_N(x,y)$ est croissante et majorée par 2.

(f) Montrer que pour tous $(x,y) \in [0,1/4] \times [0,1]$ $(G_N(x,y))_{N \geq 1}$ est une suite bornée. En déduire que l'on peut en extraire une sous-suite convergente, et que sa limite $\tilde{G}(x,y)$ satisfait la même relation fonctionnelle que G.

(g) Montrer que $\tilde{G} = G$ sur $[0,1/4] \times [0,1[$. *(Question difficile, on pourra admettre que $\tilde{G}$ et G sont continues en (0,0).)*

9. Déduire des questions précédentes que la série

$$F(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} f(n) x^n$$

converge pour tout $x \in [0, 1/4]$, et donner la relation fonctionnelle qu'elle satisfait.

10. Quelle va être l'équation fonctionnelle satisfaite par la série

$$C(y) = 1 + \sum_{k \geq 1} c(k) y^k ?$$

(On ne demande pas de preuve de convergence.)